



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Undersøgelse vedr. forankring og vederlag ved armerede betonbjælkeunderstøtninger

Heshe, Gert

*Publication date:*  
2003

*Document Version*  
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Heshe, G. (2003). *Undersøgelse vedr. forankring og vederlag ved armerede betonbjælkeunderstøtninger*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U0302

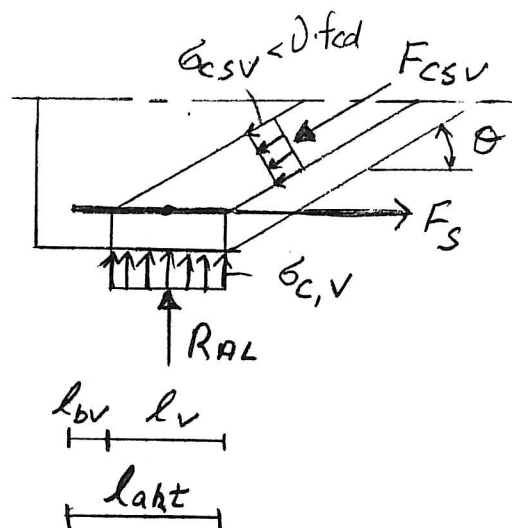
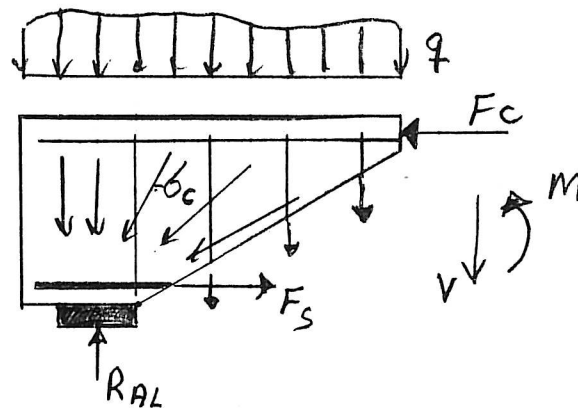
### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

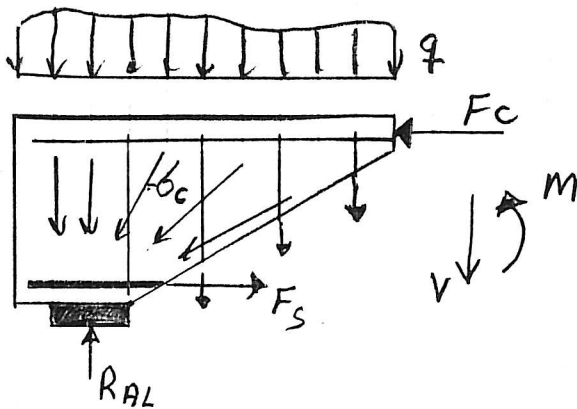
If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



# Undersøgelser vedr. forankring og vederlag ved armerede betonbjælkers endeunderstøtninger (31.10.02)

## 1. Indledning

Som vist i /1, afsnit 4.2.5/ vil der på grund af skrårevneeffekten optræde en kraft i armeringen ved simple endeunderstøtninger i armerede betonbjælker, selv om momentet her er nul,



Ved anvendelse af bøjler som forskydningsarmering, der danner vinklen  $\alpha$  med bjælkeaksen, vil denne kraft antage størrelsen

$$F_s = 0,5V(\cot \theta - \cot \alpha) + 0,5q z \cot \theta \cot \alpha \quad (1)$$

I praksis benyttes ofte lodrette bøjler, dvs.  $\alpha = 90^\circ$  og dermed  $\cot \alpha = 0$ . Derved ændres (1) til

$$F_s = 0,5V \cot \theta \quad (2)$$

Figur 1 Udsnit af bjælke ved en endeunderstøtning

Længdearmeringen skal derfor over en simpel understøtning forankres for en kraft svarende til  $F_s$  angivet ved (1) eller (2). Det antages i det følgende, at der anvendes lodrette bøjler, dvs.  $\alpha = 90^\circ$  og dermed  $\cot \alpha = 0$ .

I figur 1 er vist et udsnit af en simpel understøttet bjælke ved en endeunderstøtning. Momentet  $M$  optages af kraftparret  $F_c$  og  $F_s$ . Forskydningskraften  $V$  overføres til understøtningen via en træk-kraft i bøjlerne med størrelsen  $A_{sw} f_y$  og et skrå tryk i betonen  $\sigma_c$ , der vil have en varierende hældning hen mod understøtningen.

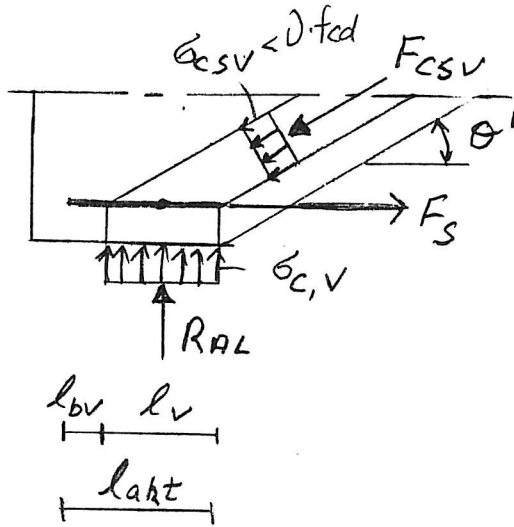
Som det skal vises nedenfor, kan forankringen udføres på flere forskellige måder. Det tilladelige vederlagstryk vil afhænge af forankringsudformningen. De nedenfor beskrevne metoder er baseret på plasticitetsteoriens nedreværdiprincip, idet der overalt benyttes statisk tilladelige og statisk sikre spændingstilstande.

## 2. Forankringsmetode I

Ved forankringsmetode I føres længdearmeringen retlinet ind over vederlaget, og armeringen forankres i betonen ved, at kraften overføres fra armeringen til betonen via forskydningspændinger. Den statiske model for forankringsmetode I er vist i figur 2. Vederlagstrykket antages i denne model optaget ved "buevirkning", idet det skrå betontryk antages at danne vinklen  $\theta'$  med vandret. Bemærk, at vinklen  $\theta'$  ikke er den samme vinkel som vinklen  $\theta$ , der anvendes ved bestemmelsen af forskydningsbæreevnen.

Denne forankringsmetode kræver, at den aktuelle forankringslængde  $l_{akt}$ , se figur 2, er større end eller lig med den nødvendige forankringslængde  $l_a$ , dvs.  $l_{akt} \geq l_a$ .

I den i figur 2 viste statiske model antages, at vederlagstrykket  $R_{AL} = \sigma_{c,v} l_v b_w$  føres op til skæring med armeringen, hvor kraften i armeringen drejer trykkraften  $R_{AL}$  således, at resultanten af  $F_s$  og  $R_{AL}$  bliver lig med og modsat rettet det skrå betontryk  $F_{csv}$ , der danner vinklen  $\theta'$  med vandret.



Figur 2 Statisk model for forankringsmodel I ved undersøgelse af lejetryk

De i figur 2 anvendte symboler er beskrevet nedenfor

$F_{csv}$  er en skrå betontrykkraft rettet ned mod bjælkens vederlag

$F_s$  er trækraften i armeringen

$R_{AL}$  er den lodrette reaktion

$\sigma_{c,v}$  er det lodrette vederlagstryk

$\sigma_{csv}$  er trykspændingen i den skrå betontrykstringer

$l_v$  er vederlagets længde

$l_{bv}$  er længden af vederlaget bag vederlagstrykket

$l_{akt}$  er den aktuelle (tilstedeværende) forankringslængde

Betragtes figur 2 fås ved projektion på vandret

$$F_{csv} \cos \theta' - F_s = 0 \quad \rightarrow \quad F_{csv} = \frac{F_s}{\cos \theta'} \quad (3)$$

Ved projektion på lodret fås

$$F_{csv} \sin \theta' - R_{AL} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{AL} = F_{csv} \sin \theta' = F_s \tan \theta' \quad (4)$$

idet (3) er indsat. Af (4) fås

$$R_{AL}^2 = F_s^2 \tan^2 \theta' = F_s^2 \frac{\sin^2 \theta'}{\cos^2 \theta'} = F_s^2 \frac{\sin^2 \theta'}{1 - \sin^2 \theta'} \quad (5)$$

Af (5) findes

$$\sin^2 \theta' = \frac{R_{AL}^2}{R_{AL}^2 + F_s^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{F_s}{R_{AL}}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2} \cot \theta\right)^2} \quad (6)$$

idet  $F_s = \frac{1}{2} V \cot \theta = \frac{1}{2} R_{AL} \cot \theta$  er indført.

Indføres effektivitetsfaktoren  $\vartheta_{vv}$  for det skrå vederlagstryk  $\sigma_{csv}$  kræves det, at

$$\sigma_{csv} \leq \vartheta_{vv} f_{cd} \quad (7)$$

Ved at indføre spændingerne  $\sigma_{c,v}$  og  $\sigma_{csv}$  i (4) fås

$$R_{AL} = b_w l_v \sigma_{c,v} = F_{csv} \sin \theta' = b_w l_v \sin \theta' \sigma_{csv} \sin \theta' \quad (8)$$

Af (8) findes

$$\sigma_{c,v} = \sigma_{csv} \sin^2 \theta' = \sigma_{csv} \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} \cot \theta)^2} \quad (9)$$

idet (6) er benyttet. Indføres kravet  $\sigma_{csv} \leq \vartheta_{vv} f_{cd}$  fås

$$\sigma_{c,v} \leq \frac{\vartheta_{vv} f_{cd}}{1 + (\frac{1}{2} \cot \theta)^2} \quad (10)$$

I henhold til 6.1.3.1 (19) i DS 411 kan effektivitetsfaktoren  $\vartheta_{vv}$  sættes til  $\vartheta_{vv} = 0,8$

Er der ved bestemmelsen af forskydningsbæreevnen fx anvendt  $\cot \theta = 2,5$  fås

$$\sigma_{c,v} = \frac{0,8 f_{cd}}{1 + (0,5 \cdot 2,5)^2} = 0,31 f_{cd} \quad (11)$$

Vederlagstrykket må i dette tilfælde ikke overstige 31 % af den regningsmæssige énaksede betontrykstyrke

Den nødvendige forankringslængde  $l_a$  bestemmes af

$$l_a = c l_b \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \quad (12)$$

hvor

$$\sigma_s = \frac{\frac{1}{2} V \cot \theta}{A_s} \quad (13)$$

$A_s$  er tværsnitsarealet af den armering, der føres ind over understøtningen

$l_b$  er basisforankringslængden svarende til, at bøjleafstanden er bestemt efter "55-reglen", dvs  $s_{55} = 55 \phi_{sw}^2 / \phi_s^2$ , hvor  $\phi_{sw}$  og  $\phi_s$  er diameteren for henholdsvis forskydnings- og længdearmeringen.

$c$  er en faktor, der afhænger af bøjleafstanden hen over den aktuelle forankringslængde  $l_{akt}$ . Hvis bøjleafstanden er  $s = s_{55}$  er  $c = 1,0$ . Hvis bøjlearmeringen tredobles på denne strækning er  $c = 0,75$ . For mellemliggende bøjlearmeringsprocenter kan der interpoleres retlinet mellem disse værdier, se fx /1, afsnit 4.6.5/

Hvis den nødvendige forankringslængde  $l_a$  er større end den aktuelle forankringslængde  $l_{ak}$  kan forankringsmetode I ikke anvendes. I sådanne tilfælde kan fx forankringsmetode II, som er beskrevet nedenfor, anvendes.

Hvis armeringen føres bag ved vederlagstrykket, dvs.  $l_{bv} > 0$ , vil den statiske model for spændingsforholdene omkring vederlaget blive ændret i retningen af modellen for forankringsmetode II. Dette betyder, som vist nedenfor, at der ved anvendelse af forankringsmetode II kan benyttes en større værdi for vederlagstrykket  $\sigma_{c,v}$  end ved den ovenfor beskrevne forankringsmetode I. Hvis  $l_{bv} = l_a$ , hvor  $l_a$  er den nødvendige forankringslængde, kan den statiske model for forankringsmetode II benyttes. Hvis  $0 < l_{bv} < l_a$  kan der interpoleres mellem de 2 værdier for  $\sigma_{c,v}$  gældende for forankringsmetoderne I og II efter samme princip som omtalt under forankringsmetode III.

### 3. Forankringsmetode II

I praksis vil bjælkens udstrækning bag vederlagets forkant ofte være mindre end den nødvendige forankringslængde. I disse tilfælde er det ikke muligt at anvende den simple forankringsmetode I. Forankringen af armeringen kan da foretages fx som vist i /1, figur 6.2-10 og figur 6.2-11/, hvilket dog ofte ved insitu-støbte betonkonstruktioner er en dyr og uhensigtsmæssig måde at forankre armeringen på.

En ofte benyttet forankringsmetode, her benævnt forankringsmetode II, i dette tilfælde er at anvende én eller flere hårnålbøjler, som vist i /1, figur 6.2-8/

Den statiske model for denne forankringsmetode er vist i figur 3. I denne model antages på den sikre side, at armeringskraften, der skal forankres, overføres til hårnålebøjlen over forankringslængden  $l_a$ . Kraft- og spændingsfordelingen bliver da som vist i figur 3a. Hårnålebøjlen er vist i figur 3b, hvor  $l_v$  er den del af den aktuelle forankringslængde  $l_{akt}$ , der forløber hen over vederlagstrykket, og  $D$  er hårnålebøjleens krumningsdiameter.

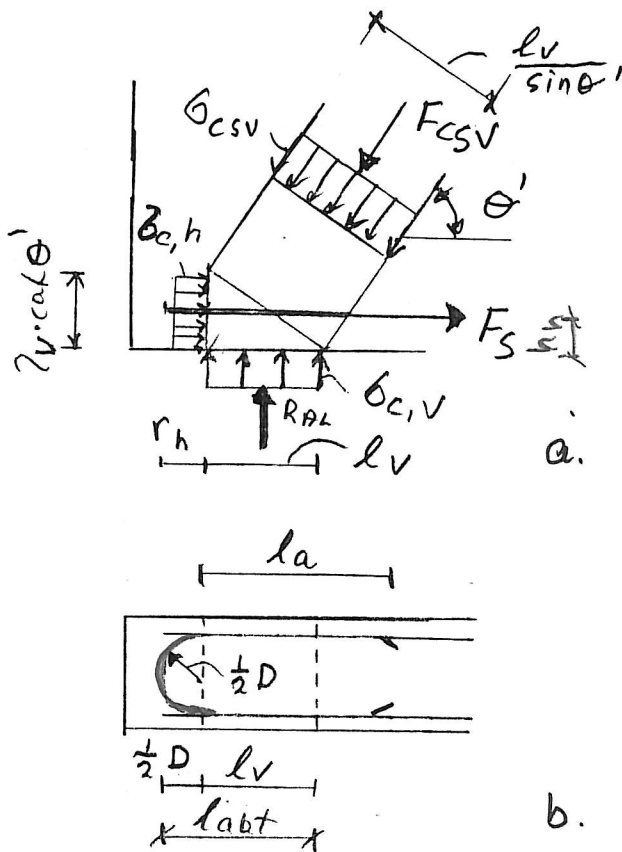
Som ved forankringsmetode I skal kræfterne  $F_{csv}$ ,  $F_s$  og  $R_{AL}$  være i ligevægt. Derfor gælder ligevægtsbetingelserne (3) og (4) også for denne statiske model.

Ved at indføre spændingerne  $\sigma_{c,v}$  og  $\sigma_{csv}$  i (4) fås

$$b_w l_v \sigma_{c,v} = b_w \frac{l_v}{\sin \phi'} \sigma_{csv} \sin \phi'$$

hvoraf der fås, at

$$\sigma_{c,v} = \frac{R_{AL}}{b_w l_v} = \sigma_{csv} \leq \vartheta_{vv} f_{cd} \quad (14)$$



Figur 3 Statisk model for forankringsmodel II

Af figur 3 ses, at

$$F_{csv} = b_w \frac{l_v}{\sin \theta'} \sigma_{csv} \quad (17)$$

$$F_s = b_w l_v \cot \theta' \sigma_{c,h} \quad (18)$$

Indsættes disse størrelser i (4) fås

$$R_{AL} = b_w \frac{l_v}{\sin \theta'} \sigma_{csv} \sin \theta' = F_s \tan \theta' = b_w l_v \cot \theta' \sigma_{c,h} \tan \theta'$$

og dermed, idet (14) er benyttet

$$\sigma_{csv} = \sigma_{c,h} = \sigma_{c,v} \quad (19)$$

Heraf ses, at spændingstilstanden i betonen lige over vederlaget er en "hydrostatisk" plan spændingstilstand, idet spændingerne vil være ens i alle retninger i planen, når de, som vist, er ens i 3 retninger. Alle retninger er derfor hovedretninger for spændingerne, og dermed er  $\tau = 0$ .

Ifølge (14) stilles kravet  $\sigma_{c,v} \leq \bar{\sigma}_{vv} f_{cd}$ . Benyttes igen  $\bar{\sigma}_{vv} = 0,8$  og  $\cot \theta = 2,5$ , ses, at ved anvendelse af forankringsmetode II skal

$$\sigma_{c,v} \leq 0,8 f_{cd} \quad (20)$$

$\theta'$  bestemmes af (6), hvorefter den regningsmæssige længde af lejebladen  $l_v$  kan beregnes af

$$l_v \cot \theta' = 2 h_h \quad (15)$$

hvor  $h_h$  er afstanden fra bjælkebund til hårnålbøjls centerlinie, dvs.

$$l_v = 2 h_h / \cot \theta' \quad (16)$$

Det ses heraf, at der ved forankringsmetode II, hvor armeringen forankres ved hjælp af hårnålbøjler, kan tillades et større vederlagstryk end ved forankringsmetode I. Dette skyldes bl.a., at der ved forankringsmetode II forekommer en gunstigere spændingstilstand, idet der, som vist nedenfor, optræder en "hydrostatisk" plan spændingstilstand med  $\tau = 0$ .

Sammenlignes med (11) ses, at det tilladelige vederlagstryk ved anvendelse af forankringsmetode II er ca. 2,6 gange så stort, som det tilladelige vederlagstryk ved anvendelse af forankringsmetode I.

Vedr. kontrol af spændingstilstanden i betonen i hårnålbøjens krumning henvises til /1, afsnit 4.6.6/ og /2/

### Forankringsmetode III

I forankringsmetode III anvendes hårnålbøjle(r) som ved forankringsmetode II, men det antages her, at forankringskraften  $F_s$  optages dels efter forankringsmetode I og dels efter forankringsmetode II.

Anvendelse af forankringsmetode III kræver, at kraften, der skal overføres til én eller flere hårnålbøjler, overføres over en nødvendig forankringslængde foran lejefladens forkant.

Den del af kraften i armeringen, der forankres efter henholdsvis metode I og metode II, bestemmes som

$$F_{sI} = \frac{1}{2} V \cot \theta \frac{l_{ak}}{l_a} \quad (21)$$

$$F_{sII} = \frac{1}{2} V \cot \theta \left( 1 - \frac{l_{akt}}{l_a} \right) \quad (22)$$

$$\text{hvor } F_s = F_{sI} + F_{sII} = \frac{1}{2} V \cot \theta \quad (23)$$

Ved forankringsmetode III kan det tilladelige lejetryk  $\sigma_{c,v}$  bestemmes af

$$b_w l_v \sigma_{c,v} = b_w l_v \left( \frac{F_{sI}}{F_s} \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} \cot \theta)^2} + \frac{F_{sII}}{F_s} \right) \vartheta_{vv} f_{cd} \quad (24)$$

$$\sigma_{c,v} = \left( \frac{F_{sI}}{F_s} \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} \cot \theta)^2} + \frac{F_{sII}}{F_s} \right) \vartheta_{vv} f_{cd} \quad (25)$$

Værdier for  $F_{sI}$  kan vælges frit i intervallet

$$0 \leq F_{sI} \leq \frac{1}{2} V \cot \theta \frac{l_{akt}}{l_a} \quad (26)$$